

多值随机微分方程中的耦合方法 及其在 Harnack 不等式中的应用*

巫 静

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 通过鞅方法构造耦合算子, 研究了多值随机微分方程中的耦合方法。同时应用耦合方法结合 Girsanov 定理证明了多值随机微分方程解的 Harnack 不等式。

关键词: 多值随机微分方程; 耦合; 耦合算子; 耦合时间; 鞅方法; Harnack 不等式; 强 Feller 性

中图分类号: O211.63 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2009) 06-0001-06

Coupling Methods for Multivalued Stochastic Differential Equations and Applications to Harnack Inequality

WU Jing

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Through the martingale approach, the construction of coupling operators is explored and coupling methods in multivalued stochastic differential equations are studied. Also Harnack inequality is obtained by applying coupling methods combined with Girsanov's theorem.

Key words: multivalued stochastic differential equation; coupling; coupling operator; coupling time; martingale approach; Harnack inequality; strong Feller

1989 年文献 [1] 介绍了随机微分方程中的耦合方法, 对两个不同的度量, 构造了耦合算子的可能最优估计。耦合方法在很多领域, 包括在随机微分方程的研究中是很重要的工具之一^[2-4]。例如, 张^[5]结合耦合方法和 Girsanov 定理, 巧妙地证明了非 Lipschitz 情形随机微分方程解的指数遍历性。多值随机微分方程首先由 Kree^[6]提出, 它是从带边界反射条件的随机微分方程中发展出来的一类新的随机微分方程。近年来这类方程引起了越来越多研究人员的兴趣和注意, 其中 Cepa^[7]通过 Yosida 逼近和 Meyer-Zheng 拓扑证明了这类方程解的存在唯一性。所谓 MSDE 是指下面这类方程:

$$\begin{cases} dX_t + A(X_t)dt \ni b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \\ X_0 = x \in \overline{D(A)} \end{cases} \quad (1)$$

其中 A 是一个多值极大单调算子, W 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的标准 Brown 运动, $D(A)$:

$= \{x \in \mathbb{R} : A(x) \neq \emptyset\}$ 。多值随机微分方程与一般随机方程的不同在于多值极大单调算子的存在。本文在 [1] 的基础上研究多值情形的耦合方法, 为此我们首先要给出相对应的鞅问题, 然后利用鞅方法把 [1] 中的结果推广到多值的情形。最后, 作为运用, 结合耦合方法和 Girsanov 定理证明了多值随机微分方程解的 Harnack 不等式。

1 一些记号

首先我们给出多值极大单调算子的一些记号, 更多内容可参考 [7]。对一个多值算子 $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 定义:

$$D(A) := \{x \in \mathbb{R} : A(x) \neq \emptyset\};$$

$$R(A) := \bigcup_{x \in D(A)} A(x);$$

$$Gr(A) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y \in A(x)\}$$

定义 1 (1) 多值算子 A 称为是单调的, 如果

* 收稿日期: 2008-12-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10871215)

作者简介: 巫静 (1985 年生), 女, 博士生; E-mail: wjjosie@hotmail.com

$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0, \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Gr(A)$ 。

(2) 算子 A 极大单调当且仅当

$(x_1, y_1) \in Gr(A) \Leftrightarrow \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0, \quad \forall (x_2, y_2) \in Gr(A)$ 。

定义2 适应过程 (X, K) 称为方程 (1) 的解, 如果满足:

(i) $X = \{X_t, F_t; 0 \leq t < \infty\}$, $X_0 = x_0, X_t \in \overline{D(A)}$;
(ii) $K = \{K_t, F_t; 0 \leq t < \infty\}$ 是一有限变差过程, $K_0 = 0$;

(iii) $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t - dK_t, 0 \leq t < \infty$;
(iv) 对任意连续适应函数 (α, β) , $\alpha = \{\alpha_t, F_t; 0 \leq t < \infty\}$, $\beta = \{\beta_t, F_t; 0 \leq t < \infty\}$ 满足若 $(\alpha_t, \beta_t) \in Gr(A), \forall t \in [0, +\infty)$, 则有

$$\langle X_t - \alpha_t, dK_t - \beta_t dt \rangle \geq 0, \quad a.s.$$

命题1 A 为一多值极大单调算子, (X, K) 和 (X', K') 连续且 K, K' 是有限变差过程。若连续函数 (α, β) 满足 $(\alpha_t, \beta_t) \in Gr(A), \forall t \in [0, +\infty)$, 而且 $\langle X_t - \alpha_t, dK_t - \beta_t dt \rangle \geq 0, \langle X'_t - \alpha_t, dK'_t - \beta_t dt \rangle \geq 0$, 那么有

$$\langle X_t - X'_t, dK_t - dK'_t \rangle \geq 0$$

下面定理给出了 MSDE 对应的鞅问题:

定理1 (X, K) 是 (1) 的一个弱解等价于: 在概率空间 (Ω, Φ, P, F) 上存在一个 d 维的连续适应过程 X 和有限变差过程 K 满足定义2, 使得对 $\forall f \in C_b^2, M_t^f \equiv f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (Lf)(X_s)ds + \int_0^t \langle \nabla f, dK_s \rangle$ 是一个连续局部鞅。其中

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

证明 假定 (X, K) 是 (1) 的一个弱解。由 Itô 公式, 对 $\forall f \in C_b^2(\mathbb{R}^d), t \in \mathbb{R}_+$, 有

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^d \partial_i f(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \partial_i \partial_j f(X_s) d \langle M^i, M^j \rangle_s, \quad a.s.$$

这里 $M_t = \int_0^t \sigma \cdot dW_s, \sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m}$ 。

容易看出 $\{M_t^f, t \in \mathbb{R}_+\}$ 是一连续局部鞅。

反之, 若连续适应过程 X 满足对所有 $f \in C_b^2, M^f$ 都是连续局部鞅。令 $\tau_n \equiv \inf\{t; |X_t| > n\}$ 。对 $n \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, d$, 取 $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ 使得当 $|x| \leq n$ 时, $f(x) = x^i$ (第 i 项)。那么 $M_n^i(t) \equiv X_{\tau_n \wedge t}^i - X_0^i - \int_0^{\tau_n \wedge t} b^i(X_s)ds + K_{\tau_n \wedge t}^i \in m_{loc}^c$ 。

令 $n \uparrow \infty$, 有

$$M^i(t) \equiv X_t^i - X_0^i - \int_0^t b^i(X_s)ds + K_t^i \in m_{loc}^c, \quad i = 1, 2, \dots, d \quad (2)$$

对 $i, j = 1, 2, \dots, d$, 取 $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ 使得 $f(x) = x^i x^j$, 则有 $i, j = 1, 2, \dots, d$,

$$X_t^i X_t^j - X_0^i X_0^j - \int_0^t b^i(X_s) X_s^j ds - \int_0^t b^j(X_s) X_s^i ds + \int_0^t X_s^i dK_s^j + \int_0^t X_s^j dK_s^i - \int_0^t a^{ij}(X_s) ds \in m_{loc}^c$$

由分部积分和唯一性, $\langle M^i, M^j \rangle_t = \int_0^t a^{ij}(X_s) ds$ 。

$s. t. t \in \mathbb{R}_+, i, j = 1, 2, \dots, d$ 。

根据 [8] 中的定理 16.3, 存在 (Ω, Φ, P, F) 的一个推广 (Ω', Φ', P', F') 及其上的一个 Brown 运动 W 使得 $M_t = \int_0^t \sigma(X_s) dW_s$, 代入 (2) 中, 得到

$$dX_t = \sigma(X_t) dW_t + b(X_t) dt - dK_t$$

因此 (X, K) 是 (1) 的一个弱解。证毕。

我们记 $P^{x,k}$ 为对应鞅问题的解, 即 $P^{x,k} \sim L(a, b)$ 。本文中算子中的系数都假定局部有界并且对应的鞅问题存在。

2 两个不同度量的耦合

沿用 [1] 中耦合的记号: 对 $p \geq 1$, 令 μ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的一个度量, 定义

$$W_p(P^1, P^2) := \inf_Q \left\{ \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mu(x, y)^p Q(dx, dy) \right\}^{1/p}$$

如果对任一可测集 $A \subset \mathbb{R}^d$, 有 $Q(A \times \mathbb{R}^d) = P^1(A), Q(\mathbb{R}^d \times A) = P^2(A)$, 那么 Q 称为是 P^1 和 P^2 的一个耦合。我们只考虑 Euclidean 度量 ρ 和离散度量 d 的耦合 W_p -耦合和 V -耦合: $\rho(x, y) = |x - y| = \left\{ \sum_{i=1}^d (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2}, d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

假定 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 和 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的两个过程, 分布分别为 P^x, P^y , 并有相同的转移函数 $P(t, \cdot, \cdot)$ 。 $P^{x,y}$ 是 $\Omega_{2d} = C([0, \infty); \mathbb{R}^{2d})$ 上的一个耦合概率测度。定义耦合时间为 $\tau := \inf\{t \geq 0; X(t) = Y(t)\}$ 。我们称耦合成功, 如果有

$P^{x,y}(\tau < \infty) = 1; P^{x,y}(X(t) = Y(t); t \geq \tau) = 1$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上给定两个算子 $L_1(a_1(x), b_1(x))$ 和 $L_2(a_2(y), b_2(y))$, 记 P_1^{x,k^1}, P_2^{y,k^2} 分别为对应鞅问题的解。在 $\mathbb{R}^{2d}$ 上定义一个耦合算子 $L(a(x, y), b(x, y))$ 如下:

$$a(x, y) = \begin{pmatrix} a_1(x) & c(x, y) \\ c(x, y)^* & a_2(y) \end{pmatrix}, b(x, y) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(y) \end{pmatrix}$$

其中 $c(x, y)$ 是一个 $d \times d$ 矩阵, 且 $a(x, y)$ 非负定。当 $c(x, y) = \sigma_1(x)\sigma_2(y)^*$ 时, 称 L 是 L_1 和 L_2 的基本耦合。令 $\Omega = \Omega_{2d} = C([0, \infty); \mathbb{R}^{2d})$ 。给定 $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$, 记 $Z(t, \omega) = Z_t(\omega)$ 为 ω 在 $\mathbb{R}^{2d}$ 中的位置, π_1, π_2 分别为 Ω_{2d} 中的自然映射:

$$X(t, \omega) = \pi_1 \circ Z(t, \omega), Y(t, \omega) = \pi_2 \circ Z(t, \omega), K^1(t) = \pi_1 \circ K(t), K^2(t) = \pi_2 \circ K(t)$$

引理 1 记 $\{P^{x,y,k}; x, y \in \mathbb{R}^d, k \in \mathbb{R}^{2d}\}$ 为耦合算子 $L(a(x, y), b(x, y))$ 鞅问题解的集合, 即 $P^{x,y,k} \sim L(a, b)$ 。那么

$$P^{x,k^1} = P^{x,y,k} \circ \pi_1^{-1}, P^{y,k^2} = P^{x,y,k} \circ \pi_2^{-1},$$

$$x, y \in \mathbb{R}^d, k \in \mathbb{R}^{2d}$$

即对所有 $x, y, k^1, k^2 \in \mathbb{R}^d, k \in \mathbb{R}^{2d}$, $P^{x,y,k}$ 是 P^{x,k^1} 和 P^{y,k^2} 的一个耦合。

证明 取 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 并且令 $F(x, y) = f(x)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ 。由于 $LF(x, y) = L_1 f(x)$, $\langle \nabla f(X_s), dK_s^1 \rangle = \langle \nabla F(Z_s), dK_s \rangle, \forall s$ 且对所有 $B \in \sigma\{X_u; u \leq s\}, s \leq t$, 算子都局部有界, $\pi_1^{-1}(B) \in \sigma\{Z_u; u \leq s\}$ 。由 $P^{x,y,k} \sim L(a, b)$ 和定理 1 容易得到

$$\begin{aligned} & \int_B (f(X_t) - \int_0^t L_1 f(X_u) du) + \\ & \int_0^t \langle \nabla f(X_u), dK_u^1 \rangle d(P^{x,y,k} \circ \pi_1^{-1}) = \\ & \int_B (f(X_s) - \int_0^s L_1 f(X_u) du) + \\ & \int_0^s \langle \nabla f(X_u), dK_u^1 \rangle d(P^{x,y,k} \circ \pi_1^{-1}) \end{aligned}$$

从而有 $P^{x,y,k} \circ \pi_1^{-1} \sim L_1$ 。由唯一性, $P^{x,k^1} = P^{x,y,k} \circ \pi_1^{-1}$, $x, y, k^1 \in \mathbb{R}^d, k \in \mathbb{R}^{2d}$ 。由此我们得到第一个等式。同理可证第二个等式。证毕。

下面定理给出了基本耦合的性质:

定理 2 令 $a_1 = a_2 = \sigma\sigma^*, b_1 = b_2 = b, \sigma$ 和 b 在 $\mathbb{R}^d$ 上连续。若对于基本耦合算子 $L(a(x, y), b(x, y))$:

$$a(x, y) = \begin{pmatrix} \sigma(x)\sigma(x)^* & \sigma(x)\sigma(y)^* \\ \sigma(y)\sigma(x)^* & \sigma(y)\sigma(y)^* \end{pmatrix},$$

$$b(x, y) = \begin{pmatrix} b(x) \\ b(y) \end{pmatrix}$$

其鞅问题解为 $P^{x,y,k} \sim L(a(x, y), b(x, y))$, 那么在 $\{\tau < \infty\}$ 上,

$$X_t = Y_t, \quad t \geq \tau, \quad P^{x,y,k} \text{ a.s.}$$

要证明这个定理, 我们需要 [9] 中推论 8.1.2 的一个推广, 证明过程从略:

引理 2 设 $\sigma: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ 和 $b: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 都是

有界可测函数。 $a = \sigma\sigma^*$, 定义 $\hat{a}: \mathbb{R}^{2d} \rightarrow S_{2d}$ 和 $\hat{b}: \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ 如下:

$$\hat{a}(x, z) = \begin{pmatrix} \sigma(x)\sigma(x)^* & \sigma(x) \\ \sigma(x)^* & I \end{pmatrix}, \hat{b}(x, z) = \begin{pmatrix} b(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

若 $P^{x,k^1} \sim L_x(a, b)$, 那么鞅问题 $L_{(x,0)}(\hat{a}, \hat{b})$ 存在解 $\hat{P}$ 使得 $P^{x,k^1} = \hat{P} \circ \prod^{-1}$ 。其中当 $\Omega_{2d} = \Omega_d \times \Omega_d$ 时, $\prod: \Omega_{2d} \rightarrow \Omega_d$ 是 Ω_{2d} 上的自然映射。

定理 2 的证明 只需证明对 $x \in \mathbb{R}^d, k \in \mathbb{R}^{2d}$, $P^{x,k}(X_t = Y_t, t \geq 0) = 1$ 。

假设 $a(x, y)$ 和 $b(x, y)$ 有界连续, 那么 L 的鞅问题存在。取

$$\eta = \begin{cases} C \exp\{-1/(1 - |x|^2)\}, & |x| < 1, x \in \mathbb{R}^d \\ 0, & |x| \geq 1, x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

其中 C 是标准化常数。令 $\eta_\varepsilon = \varepsilon^{-d} \eta(x/\varepsilon)$, $\sigma_\varepsilon = (\sigma_\varepsilon^i(x)): \sigma_\varepsilon^i(x) = (\sigma_i^* * \eta_\varepsilon)(x)$, $b_\varepsilon = (b_\varepsilon^i(x)): b_\varepsilon^i(x) = (b_i * \eta_\varepsilon)(x)$ 。显然有 $\sigma_\varepsilon^i(x), b_\varepsilon^i(x) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$, 因此存在常数 $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ 使得 $\|\sigma_\varepsilon(x) - \sigma_\varepsilon(y)\| \leq A_\varepsilon |x - y|, |b_\varepsilon(x) - b_\varepsilon(y)| \leq B_\varepsilon |x - y|$ 。

令 $P_\varepsilon^{x,y,k} \sim L_\varepsilon(\sigma_\varepsilon \sigma_\varepsilon^*, b_\varepsilon)$, 定义:

$$\bar{\sigma}_\varepsilon(x, y) = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon(x) & 0 \\ \sigma_\varepsilon(y) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon((x, y), (w, \beta)) = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_\varepsilon(x, y) \\ I \end{pmatrix},$$

$$\hat{a}_\varepsilon((x, y), (w, \beta)) = \begin{pmatrix} a_\varepsilon(x, y) & \bar{\sigma}_\varepsilon(x, y) \\ \bar{\sigma}_\varepsilon^*(x, y) & I \end{pmatrix},$$

$$\hat{b}_\varepsilon((x, y), (w, \beta)) = \begin{pmatrix} b_\varepsilon(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

由引理 2, 初始点为 $((x, x)(0, 0))$ 的鞅问题存在解 $\hat{P}_\varepsilon$ 且 $P_\varepsilon^{x,k} = \hat{P}_\varepsilon \circ \prod^{-1}$, 其中 $\prod: \Omega_{4d} \rightarrow \Omega_{2d}$ 。容易看出 (W_t, β_t) 是一个 $2d$ 维 Brownian 运动, 因此只需证

$$\hat{P}(X_t = Y_t, t \geq 0) = 1$$

由 $\hat{P}_\varepsilon \sim L(\hat{a}, \hat{b})$, 容易得到 $\hat{P}_\varepsilon - a.s.$, 有

$$X_t = x + \int_0^t b_\varepsilon(X_s) ds + \int_0^t \sigma_\varepsilon(X_s) dW_s - K_t^1,$$

$$Y_t = x + \int_0^t b_\varepsilon(Y_s) ds + \int_0^t \sigma_\varepsilon(Y_s) dW_s - K_t^2$$

令 $S_N = \inf\{t \geq 0: |X_t - Y_t| > N\}$, 由 Itô 公式和命题 1, 可得到

$$\hat{E}_\varepsilon |X_{t \wedge S_N} - Y_{t \wedge S_N}|^2 \leq C_\varepsilon \hat{E}_\varepsilon \int_0^{t \wedge S_N} |X_s - Y_s|^2 ds$$

令 $N \uparrow \infty$, 由 Gronwall 引理得到 $\hat{E}_\varepsilon |X_t - Y_t|^2 = 0$ 。从而有 $\hat{P}_\varepsilon(X_t = Y_t, t \geq 0) = 1$, $P_\varepsilon^{x,x,k}(X_t = Y_t, t \geq 0) = 1$ 。容易证明 $\{P_\varepsilon^{x,y,k}; \varepsilon > 0\}$ 是紧的, 因此可以取其子序列 $\{P_{\varepsilon_m}^{x,y,k}\}$ 使得 $P_{\varepsilon_m}^{x,y,k}$ 弱收敛到 $P_0^{x,y,k}$ 。这样有 $P_0^{x,y,k} \sim L(a(x,y), b(x,y))$ 。由局部性假设知 $P_0^{x,y,k} = P^{x,y,k}$, 所以 $P^{x,x,k}(X_t = Y_t) \geq \limsup_{m \rightarrow \infty} P_{\varepsilon_m}^{x,x,k}(X_t = Y_t) = 1, t \geq 0$ 。这样我们证明了所需的结果。证毕。

当 $p = 1, 2$ 时 W_p -耦合有如下的性质。

定理 3 假定 $a(x,y)$ 和 $b(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^{2d}$ 上连续, 且 $P^{x,y,k} \sim L(a,b)$ 。若存在常数 $C \geq 0$ 和 $c < 0$ 使得

$$L\rho^2(x,y) \leq C - c\rho^2(x,y), x,y \in \mathbb{R}^d。$$

那么 $E^{x,y}\rho^2(X_t, Y_t) \leq C/c + e^{-ct}\rho^2(x,y)$ 。特别地, 当 $C = 0$ 时, $W_2(P_1(t,x, \cdot), P_2(t,y, \cdot)) \leq \rho(x,y)e^{-ct/2} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ 。这里 $P_1(t,x, \cdot)$ 和 $P_2(t,y, \cdot)$ 是边沿过程的转移函数。若以 ρ , W_1 和 e^{-ct} 分别代替 ρ^2 , W_2 和 $e^{-ct/2}$, 结果同样成立。

证明 定义 $S_N = \inf\{t \geq 0: |X_t - Y_t| > N\}$, $T_R = \inf\{t \geq 0: |X_t|^2 + |Y_t|^2 > R\}$, $S = S_N \wedge T_R$ 。由 $P^{x,y,k} \sim L(a,b)$, 命题 1 和定理 1 得到,

$$E^{x,y}\rho^2(X_{t \wedge S}, Y_{t \wedge S}) \leq \rho^2(x,y) +$$

$$\int_0^t E^{x,y} L\rho^2(X_{u \wedge S}, Y_{u \wedge S}) du$$

由 Gronwall 引理, $E^{x,y}\rho^2(X_{t \wedge S}, Y_{t \wedge S}) \leq C/c + e^{-ct}\rho^2(x,y)$

令 $R \uparrow \infty$, $N \uparrow \infty$, 定理得证。对函数 $\sqrt{r^2 + \varepsilon}$ 运用 Itô 公式, 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 同样可以得到 W_1 的结果。证毕。

3 判断准则

固定耦合算子 $L(a(x,y), b(x,y))$, 假设对所有 $x \neq y$ 和对所有 $f \in C_0^2(\mathbb{R}^{2d})$:

$$\text{supp}(f) \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2d}: 1/n \leq |x-y| \leq N\}, n, N > 1,$$

$f(X_t, Y_t) - \int_0^t Lf(X_u, Y_u) du + \int_0^t \langle \nabla f, dK_u \rangle$ 关于 N 是一个 $P^{x,y,k}$ -鞅。

我们继续沿用 [1] 中的一些记号。

引理 3 令 $A(x,y) = a_1(x) + a_2(y) - 2c(x,y)$, $B(x,y) = b_1(x) - b_2(y)$;

$$\hat{A}(x,y) = \langle x-y, A(x,y)(x-y) \rangle,$$

$$\bar{A}(x,y) = \hat{A}(x,y)/|x-y|^2, x \neq y;$$

$$\hat{B}(x,y) = \langle x-y, B(x,y) \rangle$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的内积。对所有 $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$, $\hat{A}(x,y) \geq 0$ 。

对任意 $f \in C^2([0, \infty))$, $x \neq y$, 容易算出

$$2Lf(\rho(x,y)) = \bar{A}(x,y)f''(\rho(x,y)) + \frac{f'(\rho(x,y))}{\rho(x,y)}.$$

$$[\text{tr}A(x,y) - \bar{A}(x,y) + 2\hat{B}(x,y)] \quad (3)$$

令 $S_N = \inf\{t \geq 0: |X_t - Y_t| > N\}$, $N > 1$; $\tau_n = \inf\{t \geq 0: |X_t - Y_t| < 1/n\}$, $n > 1$, $\tau_n \uparrow \tau$ a.s. $n \uparrow \infty$; $\tau_{n,N} = \tau_n \wedge S_N$ 。取连续函数 $\gamma, \gamma^*: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $\alpha, \alpha^*: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 使得

$$\gamma(r) \geq \sup_{|x-y|=r} (\text{tr}A(x,y) - \bar{A}(x,y) + 2\hat{B}(x,y))/\bar{A}(x,y)$$

$$\gamma_*(r) \leq \inf_{|x-y|=r} (\text{tr}A(x,y) - \bar{A}(x,y) + 2\hat{B}(x,y))/\bar{A}(x,y)$$

$$\alpha(r) \leq \inf_{|x-y|=r} \bar{A}(x,y) \leq \sup_{|x-y|=r} \bar{A}(x,y) \leq \alpha^*(r)$$

定义 $C(r) = \exp\left\{\int_1^r \frac{\gamma(u)}{u} du\right\}$, $C_*(r) =$

$$\exp\left\{\int_1^r \frac{\gamma_*(u)}{u} du\right\}, f(r) = \int_1^r C(s)^{-1} ds,$$

$$f_*(r) = \int_1^r C_*(s)^{-1} ds, r > 0;$$

$$g(r) = \int_r^1 C(s)^{-1} ds \int_s^1 \frac{C(u)}{\alpha(u)} du, g_*(r) =$$

$$\int_r^1 C_*(s)^{-1} ds \int_s^1 \frac{C_*(u)}{\alpha^*(u)} du$$

那么 $f'(r) > 0$, $f''(r) + f'(r)\gamma(r)/r = 0$;

$$f'_*(r) > 0, f''_*(r) + f'_*(r)\gamma_*(r)/r = 0。$$

当 $r \uparrow \infty$ 时, $f(r) \uparrow f(\infty)$ 。类似地可以定义 $f(0)$, $f_*(\infty)$, $f_*(0)$, $g(0)$ 和 $g_*(0)$ 。

定理 4 令 $\alpha > 0$,

(i) 如果 $f(\infty) = \infty$ 且 $g(0) < \infty$, 那么耦合成功。

(ii) 如果 $f_*(\infty) < \infty$ 或者 $g_*(0) = \infty$, 那么耦合失败。

(iii) 如果 $\gamma = \gamma_*$ 且 $\alpha = \alpha^*$, 那么耦合成功当且仅当 $f(\infty) = \infty$, $g(0) < \infty$ 。

证明 令

$$F_{n,N} = - \int_{1/n}^p C(s)^{-1} ds \int_s^N \frac{C(u)}{\alpha(u)} du,$$

$$\frac{1}{n} \leq \rho \leq N, n, N > 1 \quad (4)$$

那么有

$$-\infty < F_{n,N}(\rho) \leq 0, F'_{n,N}(\rho) \leq 0,$$

$$F''_{n,N}(\rho) + F'_{n,N}(\rho)\gamma(\rho)/\rho = 1/\alpha(\rho),$$

$$2LF_{n,N}(\rho) = \bar{A}F''(\rho) + F'(\rho)(\text{tr}A - \bar{A} + 2\hat{B})/\rho \geq 1$$

令 $r = |x - y|$ 。由 $P^{x,y,k} \sim L(a, b)$ 和命题 1,

$$E^{x,y}F_{n,N}(|X_{t \wedge \tau_{n,N}} - Y_{t \wedge \tau_{n,N}}|) - F_{n,N}(r) =$$

$$\frac{1}{2}E^{x,y} \int_0^{t \wedge \tau_{n,N}} 2LF_{n,N}(|X_u - Y_u|) du -$$

$$E^{x,y} \int_0^{t \wedge \tau_{n,N}} \langle \nabla F_{n,N}, dK_s \rangle \geq \frac{1}{2}E^{x,y}(t \wedge \tau_{n,N})$$

得到 $E^{x,y}(t \wedge \tau_{n,N}) \leq -2F_{n,N}(r)$ 。再令 $t \uparrow \infty$, 有

$$E^{x,y}(\tau_{n,N}) \leq -2F_{n,N}(r) < \infty \quad (5)$$

(i) 若 $g(0) < \infty$, 那么 $F_{0,N}(r) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} F_{n,N}(r) > -\infty$ 。从 (5) 中可知

$$E^{x,y}(\tau \wedge S_N) \leq -2F_{0,N}(r) < \infty$$

另一方面, 因为 $Lf(\rho(x, y)) \leq 0, f'(r) > 0$,

$$f\left(\frac{1}{n}\right)P^{x,y,k}(\tau_n < S_N \wedge t) +$$

$$f(N)P^{x,y,k}(S_N < \tau_n \wedge t) + E^{x,y}(f(\rho): t \leq \tau_{n,N}) \leq$$

$$f(r) - E^{x,y}\left(\int_0^t \langle \nabla f, dK_s \rangle\right) \leq f(r)$$

又由 (5) 得到 $f\left(\frac{1}{n}\right)P^{x,y,k}(\tau_n < S_N) + f(N)P^{x,y,k}$

$$(S_N < \tau_n) \leq f(r) \quad (6)$$

这样有

$$P^{x,y,k}(\tau_n > S_N) \leq \frac{f(r) - f(1/n)}{f(N) - f(1/n)}$$

由于 $g(0) < \infty$, 则 $f(0) > -\infty$, 且

$$P^{x,y,k}(\tau > S_N) \leq \frac{f(r) - f(0)}{f(N) - f(0)}$$

令 $N \uparrow \infty$, 若 $f(\infty) = \infty$, 有 $P^{x,y,k}(\tau = \infty) = 0$ 。

所以 $P^{x,y,k}(\tau < \infty) = 1$, 耦合成功。

(ii) 如果 $f_*(\infty) < \infty$, 类似 (6), 可以得到

$$f_*\left(\frac{1}{n}\right)P^{x,y,k}(\tau_n < S_N) +$$

$$f_*(N)P^{x,y,k}(S_N < \tau_n) \leq f_*(r)$$

进一步有

$$P^{x,y,k}(\tau < S_N) \leq \frac{f_*(N) - f_*(r)}{f_*(N) - f_*(1/n)},$$

$$P^{x,y,k}(\tau < \infty) \leq P^{x,y,k}(\tau_n < \infty) \leq$$

$$\frac{f_*(\infty) - f_*(r)}{f_*(\infty) - f_*(1/n)} < 1$$

因此耦合失败。

如果 $g_*(0) = \infty$, 令

$$g_*(\rho, N) = \int_{\rho}^N C_*(s)^{-1} ds \int_s^N \frac{C_*(u)}{\alpha_*(u)} du < \infty,$$

$$0 < \rho \leq N$$

对 $0 < \rho \leq N$, 令 $g_*^{(0)}(\rho, N) = 1$ 并定义

$$g_*^{(m)}(\rho, N) = \int_{\rho}^N C_*(s)^{-1} ds \int_s^N \frac{C_*(u)}{\alpha_*(u)} \cdot$$

$$g_*^{(m-1)}(u, N) du, m \geq 1$$

$$\text{那么 } g_*^{(m)}(\rho, N) = \frac{1}{m!} g_*^{(m)}(\rho, N)^m, m \geq 0.$$

因此 $u_N(\rho) = -\sum_{m=0}^{\infty} g_*^{(m)}(\rho, N)$ 对所有 $\rho \in (0, N]$ 都有意义。此外,

$$-\exp(g_*(\rho, N)) \leq u_N \leq -1, u'_N \geq 0,$$

$$u_N(\rho) = \alpha_*(\rho)(u''_N(\rho) + \gamma_*(r)u'_N(\rho)/r),$$

$$\lim_{\rho \downarrow 0} u_N(\rho) = \infty, 2Lu_N(\rho) \leq u_N(\rho) \quad (7)$$

固定 $x \neq y$, 令 $r = |x - y| > 0$ 。那么对所有 $N > r$, 由 Itô 公式, 命题 1 和上式,

$$u_N(r) \geq E^{x,y}[u_N(\rho(X_{\tau_{n,N} \wedge t}, Y_{\tau_{n,N} \wedge t}))] -$$

$$\frac{1}{2}E^{x,y} \int_0^{\tau_{n,N} \wedge t} u_N(\rho_s) ds$$

由 Gronwall 引理, $E^{x,y}[u_N(\rho(X_{\tau_{n,N} \wedge t}, Y_{\tau_{n,N} \wedge t}))] \leq e^{(\tau_{n,N} \wedge t)/2} u_N(r)$

从而有

$$u_N(r) \geq E^{x,y}[e^{-(\tau_{n,N} \wedge t)/2} u_N(\rho(X_{\tau_{n,N} \wedge t}, Y_{\tau_{n,N} \wedge t}))] \geq$$

$$E^{x,y}[e^{-t/2} u_N(\rho(X_{\tau_{n,N} \wedge t}, Y_{\tau_{n,N} \wedge t})) : \tau_n \leq S_N \wedge t] =$$

$$u_N(1/n) e^{-t/2} P^{x,y,k}(\tau_n \leq S_N \wedge t)$$

即 $P^{x,y,k}(\tau_n \leq S_N \wedge t) \leq e^{t/2} u_N(r)/u_N(1/n)$

先后令 $n \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$, 有 $P^{x,y,k}(\tau \leq t) = 0, t \geq 0$ 。因此 $P^{x,y,k}(\tau < \infty) = 0$, 耦合不成功。证毕。

引理 4 如果一个耦合包括两个独立耦合部分, 并且每一耦合都满足这样一个性质: 相遇后即合并。那么耦合时间是 $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$, 其中 τ_1 和 τ_2 分别是各部分耦合时间。耦合成功当且仅当每一部分都成功。

4 耦合方法的应用: Harnack 不等式

将结合耦合方法和 Girsanov 定理给出多值随机微分方程解的 Harnack 不等式。假设:

(H₁) (Lipschitz 连续性) 存在 $\lambda, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ 满足对所有的 $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$2 \langle x - y, b(x) - b(y) \rangle \leq \lambda |x - y|^2,$$

$$\|\sigma(x) - \sigma(y)\|_2^2 \leq \lambda_1 |x - y|^2$$

(H₂) (σ 的非退化性) 存在 $\lambda_2 > 0$, 使得 $\sup_i \|\sigma^{-1}\|_2 \leq \lambda_2$ 。

定理 5 假定 (X_t, K_t) 是方程 (1) 的解, P_t 是其转移概率, 那么在假设 (H₁) 和 (H₂) 下, 对任意 $T > 0$, 任意严格正有界可测函数 $f, \alpha > 1$, $x, y \in \overline{D(A)}$, 有

$$(P_{\mathcal{T}}f(y))^{\alpha} \leq \exp\left\{\frac{\lambda_2^2\alpha}{2T(\alpha-1)}|x-y|^2(e^{(\lambda+\lambda_1/2)T}-1)^2\right\}(P_{\mathcal{T}}f^{\alpha}(x))$$

特别地, P_t 具有强 Feller 性。

证明 考虑下列耦合方程:

$$\begin{cases} dX_t + A(X_t)dt \ni b(X_t)dt + \sigma_t dW_t, & X_0 = x, \\ dY_t + A(Y_t)dt \ni b(Y_t)dt + \sigma_t d\tilde{W}_t + \\ \quad a_t \frac{X_t - Y_t}{|X_t - Y_t|} \cdot \mathbf{1}_{|t| < \tau} dt, & Y_0 = y \end{cases} \quad (8)$$

其中 $a_t := |x-y|(e^{(\lambda+\lambda_1/2)T}-1)/T$, $t \in [0, T]$ 。

由于 $\left|a_t \frac{X_t - Y_t}{|X_t - Y_t|}\right| \leq C_T$, 因此 (8) 的第二个方程有唯一解。对 $r \rightarrow \sqrt{|r|^2 + \varepsilon}$ 运用 Itô 公式, 再令 $\varepsilon \downarrow 0$ 得到 $dE|X_t - Y_t| \leq (\lambda + \lambda_1/2)E|X_t - Y_t|dt - E(a_t)dt$ 。

由 $a_t > 0$ 和 Gronwall 引理有

$$E|X_t - Y_t| \leq |x-y|e^{(\lambda+\lambda_1/2)t}$$

如果 $T < \tau$, 那么

$$E|X_T - Y_T| - |x-y| \leq (\lambda + \lambda_1/2)$$

$$E \int_0^T |X_t - Y_t| dt - E \int_0^T a_t dt \leq -|x-y|$$

这说明 $X_T = Y_T$, 矛盾。所以 $T > \tau$, a. s.。这时 (8) 的第二个方程可以写为:

$$dY_t + A(Y_t)dt \ni b(Y_t)dt + \sigma_t d\tilde{W}_t, Y_0 = y$$

其中 $d\tilde{W}_t := dW_t + a_t \sigma_t^{-1} \frac{X_t - Y_t}{|X_t - Y_t|} \cdot \mathbf{1}_{|t| < \tau} dt$, $t \in [0, T]$ 。

$$\text{定义 } H(X_t, Y_t) := a_t \sigma_t^{-1} \frac{X_t - Y_t}{|X_t - Y_t|} \cdot \mathbf{1}_{|t| < \tau},$$

$t \in [0, T]$,

$$R := \exp\left\{\int_0^T \langle H(X_s, Y_s), dW_s \rangle - \frac{1}{2} \|H(X_s, Y_s)\|^2 ds\right\}$$

那么 $\|H(X_t, Y_t)\|^2 \leq \lambda_2^2 |x-y|^2 (e^{(\lambda+\lambda_1/2)T}-1)^2/T^2$, $t \in [0, T]$ 。

但 $\tilde{W}_t$ 在 $R \cdot P$ 下是一个 Brownian 运动。这样由 Höder 不等式, 对任意 $f \in bB(\mathbb{R}^d)$, $P_{\mathcal{T}}f(y) = ERf(Y_T) = ERf(X_T) \leq \{ER^{\alpha/(\alpha-1)}\}^{(\alpha-1)/\alpha} \{P_{\mathcal{T}}f^{\alpha}(x)\}^{1/\alpha}$ 。

$$\text{容易计算 } ER^{\alpha/(\alpha-1)} \leq \exp\left\{\frac{\lambda_2^2\alpha}{2T(\alpha-1)^2}|x-y|^2\right\}$$

$\{e^{(\lambda+\lambda_1/2)T}-1\}^2\}$, 从而有

$$(P_{\mathcal{T}}f(y))^{\alpha} \leq \{ER^{\alpha/(\alpha-1)}\}^{(\alpha-1)}(P_{\mathcal{T}}f^{\alpha}(x)) \leq$$

$$\exp\left\{\frac{\lambda_2^2\alpha}{2T(\alpha-1)}|x-y|^2(e^{(\lambda+\lambda_1/2)T}-1)^2\right\}(P_{\mathcal{T}}f^{\alpha}(x))$$

因此, $|P_{\mathcal{T}}f(y) - P_{\mathcal{T}}f(x)| = |E(R-1)f(X_T)| \leq \|f\|E|R-1|$ 。

但是 $\lim_{y \rightarrow x} E|R-1| = E \lim_{y \rightarrow x} R - 1 = 0$, 因此 P_T 具有强 Feller 性。证毕。

参考文献:

- [1] CHEN M, LI S F. Coupling methods for multidimensional diffusion processes[J]. Annals of Probability, 1989, 17(1): 151-177.
- [2] GRIFFEATH D. Coupling methods for Markov Processes [J]. Adv In Math, 1978, 2: 1-43.
- [3] LINDVALL T. On coupling of diffusion Process [J]. J Appl Probab, 1983, 20: 82-93.
- [4] LINDVALL T, ROGERS L C G. Coupling of multidimensional diffusions by reflection [J]. Annals of Probability, 1986, 14: 860-872.
- [5] ZHANG X C. Exponential ergodicity of non-Lipschitz stochastic differential equations [J]. Proceedings of American Mathematical Society, 2009, 137: 329-337.
- [6] KREE P. Diffusion equation for multivalued stochastic differential equations [J]. Journal of Functional Analysis, 1982, 49: 73-90.
- [7] CEPA E. Equations différentielles stochastiques multivoques [J]. Lecture Notes in Mathematics, Sem Prob, 1995, XXIX: 86-107.
- [8] 黄志远. 随机分析学基础[M]. 2 版, 北京: 科学出版社, 2001.
- [9] HUANG Z Y. Foundations of stochastic analysis [M]. 2nd edition, Beijing: Science Press, 2001.
- [10] STROOCK D W, VARADHAN S R S. Multidimensional diffusion processes [M]. New York: Springer, 1979.
- [11] WANG F Y. Harnack inequality and applications for stochastic generalized porous media equations [J]. Annals of Probability, 2007, 35(4): 1333-1350.
- [12] IKEDA N, WATANABE S. Stochastic differential equations and diffusion processes [M]. 2nd ed. New York: North-Holland, 1989.